Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen de Álgebra Lineal

18 de mayo de 2018

NOMBRE DEL ESTUDIANTE:____

Resuelve los siguientes ejercicios justificando todas tus respuestas.

1. Demuestra que si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal de la forma

$$T(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz invertible 2×2, entonces:

   a) La imagen de una recta es una recta.
   b) La imagen de una recta que pasa por el origen es una recta que pasa por el origen.
   c) Las imágenes de rectas paralelas son rectas paralelas.

2. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Si el núcleo de T es

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = 5x_2 \text{ y } x_3 = 7x_4\}$$

demuestra que T es suprayectiva.

3. Sean $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a la recta $y = x$ y $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de $\pi/2$ con centro en el origen. Hallar la matriz de $(U \circ T)^3$.

4. Sea A una matriz real simétrica de $n \times n$, supongamos que λ_1 y λ_2 son valores propios distintos de A con correspondientes vectores propios v_1 y v_2. Demuestra que v_1 y v_2 son ortogonales.

5. Sean Ay B matrices de tamaño $n \times n$. Demuestra que traza(AB) = traza(BA). ¿Es cierto que traza(ABC) = traza(ACB)? Demuestra o da un contraejemplo.