Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen de Álgebra Lineal

19 de enero de 2018

NOMBRE DEL ESTUDIANTE:____

`Resuelve los siguientes ejercicios justificando todas tus respuestas.`

1. Encuentra una base para el núcleo y la imagen de la transformación lineal $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ una base para $\mathbb{R}^n$. Demuestra que si A es una matriz de $n \times n$, invertible, entonces $\{Av_1, Av_2, ..., Av_n\}$ también es una base para $\mathbb{R}^n$.

3. Considera $\mathbb{R}^4$ con el producto interno usual. El conjunto S consiste de los siguientes vectores: $u_1 = (1, 1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, 1, 3)$, $u_3 = (1, 1, -9, 2)$ y $u_4 = (16, -13, 1, 3)$.
   a) Demuestra que S es una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$.
   b) Encuentra las coordenadas de un vector arbitrario (a, b, c, d) en $\mathbb{R}^4$ relativas a la base S.

4. Supón que A es una matriz con polinomio característico $p_A(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. ¿Es A invertible? Si lo es, encuentra una expresión para A^{-1} en términos de combinaciones lineales de las potencias de A.

5. Una matriz A cuadrada se dice nilpotente si existe un número natural m tal que $A^m = 0$. Demuestra que A es nilpotente si y solo si el único valor propio de A es el 0.