Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen de Cálculo y Álgebra Lineal (ECAL)

17 de enero de 2014

Nombre del alumno: ____

Resuelva los problemas siguientes justificando todas sus respuestas

Cálculo

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q^2}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ con } p \text{ y } q \text{ enteros primos relativos} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}.$$

Determine los puntos en donde f es continua.

2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ derivable en cada punto de una bola abierta B. Suponga que existen $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ vectores linealmente independientes tales que $D_{u_i} f(a) = 0$ para todos $i = 1, 2, \ldots, n$ y para todo $a \in B$. Demuestre que f es constante en B.

3. Sea $x \leq 0$. Demuestre que $\left| \int_0^x \frac{e^t}{n!}(x-t)^n dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ para todo $n \geq 1$.

4. Encuentre el punto sobre la gráfica de $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ más cercano al origen de coordenadas.

5. Sea $F(y) = \int_0^y \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx$. Demostrar que $F(y) > 0$, si $0 < y < 3\pi$.

6. Demuestre que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\, dx$ para todo $n \geq 1$.

Álgebra lineal

7. Sean $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que la ecuación del plano que los contiene está dada por: $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

8. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demuestre que A es similar a su transpuesta.

9. Sea V_λ el espacio propio de la transformación lineal $T : V \to V$ asociado al valor propio λ. Suponga que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son valores propios de T. Demuestre que $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

10. Sean T_a y T_b reflexiones del plano $\mathbb{R}^2$ con respecto a los subespacios determinados por las ecuaciones $y = ax$ y $y = bx$, respectivamente. Demostrar que $T_a \circ T_b$ es una rotación del plano.