LIMA de la UAEH 10 de enero de 2020

Examen ECAL de Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante ______________________________

1. Sean A, B y G matrices reales de 3×3 tales que $\det(B) = \frac{1}{4}$, $\det(G) = 2$ y $A = G^{-1}BG$. Calcular $\det(2A)$.

2. Suponga que A es una matriz real de 2×2 cuyos eigenvalores son $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$. Demuestre que $A^2 - 3A$ es la matrix identidad.

3. Considere el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son una base para P_2?
   a) $4 + 6x + x^2$, $-1 + 4x + 2x^2$, $5 + 2x - x^2$
   b) $-4 + x + 3x^2$, $6 + 5x + 2x^2$, $8 + 4x + x^2$

4. Demostrar que si A es una matriz compleja de $n \times n$ con n impar, entonces A tiene al menos un eigenvalor real.

5. Considere el espacio vectorial P_2 de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2. Sea $T\colon P_2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ b + c \end{pmatrix}$$

   a) ¿Cuáles, si alguno, de los siguientes polinomos está en el núcleo de T?
   (i) $1 + x$, (ii) $x - x^2$, (iii)$1 + x + x^2$.

   b) ¿Cuáles, si alguno, de los siguientes vectores están en el rango de T?
   (i) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (iii) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   c) Describa el núcleo y el rango de T.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrix real tal que

   a) $a, b, c, d \geq 0$, *b*) $a^2 + b^2 = 1$, *c*) $c^2 + d^2 = 1$, *d*) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = 0$.

   Demostrar que A es invertible y calcule A^{-1}.