LIMA de la UAEH 26 de julio de 2019

Examen ECAL de Álgebra Lineal.

Nombre completo del estudiante:____

RESUELVE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS, JUSTIFICANDO TODAS TUS RESPUESTAS.

1. Sea B la base de $\mathbb{R}^2$ dada por $\{(2,1),(4,0)\}$. Encuentra una base B' tal que
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$
sea la matriz de cambio de base de B a B'.

2. Una *matriz escalar* es una matriz que es un múltiplo escalar de la matriz identidad, esto es, de la forma λI donde λ es un escalar. Demuestra que si una matriz cuadrada y diagonalizable A tiene un único valor propio, entonces es una matriz escalar. (Muestra con un ejemplo que puede haber matrices cuadradas con un único valor propio que no sean escalares).

3. (a) Demuestre que si A es una matriz nilpotente entonces cero es su único valor propio. (b) Demuestre que si A es una matriz idempotente entonces cero y uno son sus únicos valores propios posibles.

4. Hallar el determinante de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \\ 5-2a & -2+4a & 2+a & 3+2a \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Dos matrices cuadradas A y B de tamaño n se dicen *unitariamente equivalentes* si existe una matriz unitaria U (i.e., $U^* = U^{-1}$ con U^* la matriz transpuesta conjugada de U) tal que $UB = AU$. Demuestre que si A y B son unitariamente equivalentes entonces: (a) tienen el mismo polinomio característico. ¿Por qué esto significa que también A y B tienen la misma traza? (b) Demuestre que $\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2$, en donde a_{ij} y b_{ij} denotan las componentes de A y B, respectivamente.

6. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se dice que $f(\overline{x},\overline{y})$ es una *función bilineal* si para cada $\overline{y} = (y_1, y_2)$ fijo $f(\cdot,\overline{y})$ es una función lineal en su primer argumento, y similarmente para $f(\overline{x},\cdot)$ con $\overline{x} = (x_1, x_2)$ fijo. Defínase la suma de funciones y multiplicación por escalares de la manera usual: $(f+g)(\overline{x},\overline{y}) = f(\overline{x},\overline{y}) + g(\overline{x},\overline{y})$ y $(\alpha f)(\overline{x},\overline{y}) = \alpha f(\overline{x},\overline{y})$, $(\alpha \in \mathbb{R})$. Demuestre que el conjunto de funciones bilineales con las operaciones definidas es un espacio vectorial de dimensión finita, determinando su dimensión y una base para el mismo.