LIMA de la UAEH 25 de julio de 2019

Examen ECAL de Cálculo.

Nombre completo del estudiante:____________________________________

RESUELVE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS, JUSTIFICANDO TODAS TUS RESPUESTAS.

1. Demuestre, a partir de la definición de continuidad, que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces f^2 también es continua en x_0. Muestre con un ejemplo que la afirmación recíproca es falsa.

2. Suponga que $f(t)$ es una función vectorial tal que $f'(t)$ existe para toda $t \in \mathbb{R}$. Pruebe que si la magnitud $|f(t)| = 7$ para todo t entonces $f(t)$ y $f'(t)$ son vectores perpendiculares para todo t.

3. Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que su derivada es decreciente en $(0,\infty)$, $f'(x) \geq 0$ para toda $x \in (0,\infty)$ y $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Demuestre que existe el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(x)\,dx \right).$$

   Sugerencia: si $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, demuestre que $F(k+\frac{1}{2}) - F(k) = \frac{f(k)}{2} + \frac{f'(x_k)}{8}$ y que $F(k+1) - F(k+\frac{1}{2}) = \frac{f(k+1)}{2} - \frac{f'(y_k)}{8}$. ¿Quiénes son x_k y y_k? Sume estas expresiones desde $k = 1$ hasta $k = n-1$.

4. Establezca la convergencia o la divergencia de las sucesiones (a_j) y (b_j) ($j \in \mathbb{N}$) en donde:

$$a_j = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{j^2},$$
$$b_j = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{j^j}.$$

   Sugerencia: Para la primer sucesión, note que para todo $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Para la segunda, demuestre que $b_j < a_j$ para toda j suficientemente grande.

5. Calcular, si existen, todos los puntos locales extremos y puntos silla de la función $f(x,y) = e^y(y^2 - 2x^2)$.

6. Calcule $\iint_R x^2\,dxdy$, donde R es la región determinada por las desigualdades:

$$-1 \leq x - y \leq 1, \qquad 0 \leq x + y \leq 2.$$