Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen ECAL de Cálculo

Enero 17 de 2023

NOMBRE:____

`Resuelva los siguientes ejercicios justificando todas sus respuestas.`

1. Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números reales, tales que la primera es acotada y el límite de la segunda cuando $n \to \infty$ es igual a cero. Probar que
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$$

2. Determine todos los valores de a para los cuales $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(a^2-5)^n}$ sea convergente.

3. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = e^x + x^5$.
   a) Demostrar que f es invertible.
   b) Si g es la función inversa de f, calcular $g'(1+e)$.

4. Sea $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, y sea D el triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. Demostrar que
$$\iint_D f(x+y)dx\,dy = \int_0^1 uf(u)du$$
.

5. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diferenciable en un punto p, y tal que
$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(p) = -2, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y}(p) = 4, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(p) = 3, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y}(p) = 1.$$
Si además se sabe que $F(p) = (-1, 2)$, encontrar las derivadas parciales de $(G \circ F)(p)$ para $G(x,y) = (x^3y, x^2 + y^4)$.