

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen de Cálculo (ECAL)

Enero 2016

NOMBRE DEL ALUMNO: _____

JUSTIFIQUE CADA UNA DE SUS RESPUESTAS

1. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ 3y^2 & \text{si } x \text{ es racional,} \end{cases}$$

calcular $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$ y demostrar que la otra integral iterada no existe. ¿Qué puede decir sobre la integrabilidad de f en $[0, 1] \times [0, 1]$?

2. Suponga que la función $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que $f(xy) = f(x) + f(y)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)}{x} = 1$. Demostrar que $f(x) = \ln(x)$.

3. Demuestre que

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1 \quad \text{para toda } x > 0.$$

4. Demuestre que si f es diferenciable en cada punto de $\overline{\mathbf{ab}}$ y si $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$, existe un punto \mathbf{c} entre \mathbf{a} y \mathbf{b} tal que

$$\nabla f(\mathbf{c}) \perp (\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

5. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que para cada $x \in \mathbb{R}$ se cumple la igualdad

$$\int_0^x f(t) dt = \int_x^1 t^2 f(t) dt + \frac{x^2}{2} + C$$

para alguna constante $C \in \mathbb{R}$. Dar una fórmula implícita para $f(x)$ y calcular la constante C .

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, 0) = 0$ y $f(x, y) = \left(1 - \cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right) \sqrt{x^2 + y^2}$ para $y \neq 0$

a) Demuestre que f es continua en $(0,0)$

b) Calcule todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$

c) Demuestre que f no es diferenciable en $(0,0)$