Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Licenciatura en Matemáticas Aplicadas

Examen de Álgebra (ECAL)

Enero 2016

NOMBRE DEL ALUMNO:____

JUSTIFIQUE CADA UNA DE SUS RESPUESTAS

1. Probar que el determinante de Vandermonde

$$det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{pmatrix}$$

   es un polinomio cúbico en x y que se anula en $x = a$, $x = b$ y $x = c$.

2. Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica y definida positiva. Demuestre que si $\mathbf{B}$ es simétrica,

$$\lambda_{\text{mín}}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) > \lambda_{\text{mín}}(\mathbf{B})$$

$$\lambda_{\text{máx}}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) > \lambda_{\text{máx}}(\mathbf{B}).$$

   donde $\lambda_{\text{mín}}$ es el valor propio más pequeño y $\lambda_{\text{máx}}$ es el valor propio más grande.

3. Sea V un espacio vectorial y supongamos que $T : V \to V$ es una trasformación lineal que satisface que $T^2 = I$, donde I es la identidad de V. Demuestra que 1 o -1 es un valor propio de T

4. Una matriz A_{nxn} se dice que es nilpotente, si existe un número natural p tal que $A^p = 0$ y $A^k \neq 0$ para todo $k < p$.

   a) Demostrar que, si A es nilpotente de orden p, entonces $I_n - A$ es una matriz invertible y, además $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3 + ... + A^{p-1}$, donde I_n es la matriz identidad de orden n.

   b) Estimar $(I_n - A)^{-1}$ para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$