Universidad Autonóma del Estado de Hidalgo
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas
Examen de Cálculo y Álgebra Lineal (E C A L)

E n e r o 2 0 1 2

J u s t i f i q u e s u s R e s p u e s t a s

Apellido Paterno *Apellido Materno* *Nombre*

1. Demostrar que si f es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ y

$$f(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

entonces f es idénticamente cero para todo x.

2. Demostrar que si $a < b$, entonces $\dfrac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \dfrac{b-a}{1+a^2}$.

3. Demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+4} = \frac{\pi}{8}.$$

4. Sean a, b y c positivos. Calcular el volumen del elipsoide dado por la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

5. Encontrar los máximos y mínimos locales y globales de la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + y)$ en el cuadrado $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

6. Dado el campo vectorial $F(x, y, z) = (2xy, x^2+z^2, 2yz)$, primero demostrar que es conservativo y luego encontrar una función potencial.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ una base de V. Se define $T : V \to V$ como $T(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, como $T(\alpha_n) = 0$ y se extiende linealmente al resto de los elementos de V. Es decir,

$$T(c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots + c_{n-1}\alpha_{n-1} + c_n\alpha_n) = c_1\alpha_2 + c_2\alpha_3 + \cdots + c_{n-1}\alpha_n.$$

Si A es la matríz de T respecto de la base dada, demostrar que A es similar a su transpuesta.

8. Sea A una matriz $n \times n$. Suponga que existe un polinomio $p(x)$ con $p(0) \neq 0$ tal que $p(A) = 0$. Demostrar que A es invertible.

9. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ elementos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que forman una base de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si la matríz $A = (a_{ij})$ es no singular, en donde $a_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

10. Determinar todas las formas canónicas de Jordan posibles para un operador lineal $T : V \to V$ cuyo polinomio característico sea $p(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 5)^2$.