LIMA de la UAEH 27 de julio de 2012

Examen de Cálculo y Álgebra Lineal

Nombre completo del estudiante: ______________________________________

RESUELVE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS, JUSTIFICANDO TODAS TUS RESPUESTAS.

1. Para funciones f, g y h continuas sobre $[a,b]$ y diferenciables sobre (a,b), define

$$F(x) = \det \begin{bmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{bmatrix}, \quad x \in [a,b].$$

Muestra que existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $F'(x_0) = 0$.

2. Sea $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida mediante la regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ fracción irreducible} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

¿En qué puntos es continua la función f?

3. Determina si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$$

converge absolutamente, condicionalmente, o diverge.

4. Demuestra que la funcion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

no es diferenciable en $(0,0)$.

5. Sean

$$D = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n\},$$

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida mediante la regla de correspondencia

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Calcula el valor máximo de la función f sujeta a la restricción

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a.$$

6. Sea $r > 0$. Determina el volumen de la región en $\mathbb{R}^3$ definida por la desigualdad

$$|x| + |y| + |z| \leq r.$$

7. Evalua la integral de línea

$$\oint_T xy\,dx + x^2y^3\,dy$$

donde T es el triángulo con vertices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,2)$ con orientación positiva.

8. Considera el conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0, 4x - 6y - 3z = 0\}$$

   - Demuestra que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
   - Encuentra una base para V.
   - Se define $V^\perp \subset \mathbb{R}^3$ como el espacio de todos los vectores perpendiculares a V. Encuentra una base de $V^\perp$.

9. Encuentra, si existe, o demuestra que no existe, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que el núcleo de T sea igual a la imagen de T.

10. Considera una matriz A con polinomio característico

$$p(x) = (x-1)^3(x-2)^3(x-3)^3$$

y polinomio mínimo

$$q(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

Escribe la forma canónica de Jordan de A.