ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA RELACIÓN PITAGÓRICA EN LIBROS DE MATEMÁTICAS DE BACHILLERATO

Rondero Guerrero, C.[1,1*] , Reyes Rodríguez, A.[2] , Acosta Hernández, J. A.[3], Campos Nava, M.[4] y Torres Rodríguez, A.[5]

[1,2,3,4,5] *Área Académica de Matemáticas y Física del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. Carretera Pachuca-Tulancingo s/n col. Carboneras, Mineral de la Reforma , Hgo. CP 42100*

Investigación-POHM056

Resumen

Reportamos los avances de un trabajo de investigación en el cual se hace un análisis didáctico de la forma de abordar la relación pitagórica (RP) en diversos libros de matemáticas para bachillerato utilizados en México. El análisis de los libros de texto se ha identificado como un área central de investigación, ya que es útil para establecer la coherencia entre los objetivos de un programa de estudios y los medios para conseguirlos; así como el origen de algunas dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

Palabras clave: *Análisis didáctico, libros de texto, matemáticas, relación pitagórica.*

1. Introducción

El Teorema de Pitágoras es un conocimiento ancestral del que se tiene registro en diversas culturas: babilonia, egipcia, griega, india, y china. Actualmente, la mayoría de las personas que han cursado la educación básica, asocian al Teorema de Pitágoras con la relación algebraica $a^2+b^2=c^2$. Al realizar esta asociación, las literales a, b y c se interpretan como las longitudes de los catetos y de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos cuadrados se encuentran relacionados de tal forma que es posible determinar la longitud de un tercer lado en un triángulo rectángulo si se conocen las longitudes de los otros dos lados. La expresión $a^2+b^2=c^2$ básicamente expresa la relación de los cuadrados de tres números o magnitudes, de tal manera que la suma de los cuadrados de dos de ellas es igual al cuadrado de la tercera. Sin embargo, para los griegos de la época de Pitágoras, este resultado se pensaba esencialmente como una relación entre áreas. Una consideración importante de remarcar es el hecho de que, en la perspectiva de este trabajo, es más conveniente denominar a la propiedad indicada como relación pitagórica (RP), y reservar el término Teorema de Pitágoras, para el resultado geométrico, dada la amplia variedad de ámbitos donde tiene presencia en los desarrollos matemáticos.

El Teorema de Pitágoras es uno de los resultados más importantes de las matemáticas y esto se puede observar en la cantidad de demostraciones que se han realizado del mismo. De acuerdo con Loomis (1972), solamente existen cuatro tipos de demostraciones, las algebraicas, que se basan en relaciones lineales e implican el concepto de tiempo; las geométricas, que están basadas en la comparación de áreas e implican en concepto de espacio; las quaterniónicas, basadas en las operaciones con vectores, y que implican el concepto de dirección y, finalmente, las dinámicas, basadas en la masa y la velocidad, las cuales implican el concepto de fuerza.

Por otro lado, los libros de texto son el principal recurso para apoyar el proceso de aprendizaje del que disponen profesores y estudiantes, y por ello resulta relevante analizar la forma de abordar los contenidos, así como las características de las tareas que se proponen en estos materiales. El aprendizaje de los estudiantes depende en gran medida del tipo de problemas y escenarios de instrucción a los que se enfrentan durante su educación escolarizada (Stein y Smith, 1998). En este sentido, la investigación en torno a cómo se abordan los contenidos en los libros de texto resulta relevante, porque estos materiales representan un recurso importante que tiene una fuerte influencia en las prácticas del salón de clase (Stacey y Vincent, 2009)

2. Contenido

La literatura de investigación en torno a los libros de texto de matemáticas ha crecido y se ha diversificado durante los últimos treinta años (Fan, 2011). Con la finalidad de identificar los diversos aportes al conocimiento en educación matemática, las investigaciones cuyo eje son los libros de texto de matemáticas se han clasificado en: (i) artículos de corte filosófico o empírico que reflexionan sobre el papel de los libros de texto en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas; (ii) investigaciones que analizan las características de los libros de texto de matemáticas, incluyendo la identificación de semejanzas y diferencias de textos que pertenecen a dos o más series, (iii) trabajos que caracterizan el uso de los libros de texto tanto por profesores como por estudiantes, o que identifican cómo los libros de texto moldean la forma de enseñar y aprender matemáticas y (iv) el resto de las investigaciones sobre los libros de texto, por ejemplo, aquellas que se interesan en los libros electrónicos y las relaciones entre los libros de texto y el desempeño de los estudiantes.

Categoría 1. En esta categoría se puede citar el trabajo de Fan y Kaeley (2000), quienes encontraron que los profesores ponen en práctica diferentes estilos de estrategias de enseñanza en función de los libros de texto que utilizan, o el trabajo de Fan (2011) quien propone un marco conceptual en el que los libros de texto se conciben como una variable intermedia en el contexto de la educación.

Categoría 2. Se incluyen trabajos que analizan libros de texto individuales o series de libros de texto, los cuales se enfocan en cómo se aborda un tema o temas particulares; así como el análisis de diferentes series de libros de texto de un mismo país o la comparación de textos de diferentes países con el objetivo de identificar las semejanzas y diferencias. Otros estudios han comparado los libros de texto de Corea y Estados Unidos con la finalidad de encontrar semejanzas y diferencias en la forma de cómo abordan la multiplicación y división de fracciones, con base en categorías que incluyen las características matemáticas de los problemas, las características del contexto, el tipo de respuesta y los requerimientos cognitivos (Son, 2005).

En esta misma línea de ideas Shield y Dole (2009), examinaron un libro de cada uno de los grados octavo, noveno y décimo, con la finalidad de determinar si éstos promueven principios pedagógicos orientados a la construcción de conexiones y la estructuración de conceptos relacionados con la proporcionalidad. Los resultados indican que los libros analizados no promueven el reconocimiento de estructuras similares para los diferentes contextos de los problemas.

Categoría 3. En esta categoría se incluyen trabajos como el de Remillard (1999) quien estudió la forma en que dos profesores de primaria usan los libros de texto, estableciendo tres modelos de construcción curricular. Por otra parte, Nicol y Crespo (2006), analizaron de qué manera cuatro profesores canadienses de matemáticas en formación usan los materiales curriculares, obteniendo como resultados que el entendimiento sobre el uso de los libros de texto cambió durante y después de las prácticas en el salón de clase.

Categoría 4. A esta categoría pertenecen trabajos como el de O'Keeffe y O'Donoghue (2011), quienes se enfocaron en determinar cuáles características de los libros de texto impactan positivamente en el aprendizaje de los estudiantes, con base en categorías tales como el contenido, la estructura, las expectativas y el lenguaje (O'Keeffe y O'Donoghue, 2011). Esta categoría también incluye trabajos enfocados en identificar cuál es la posición que el libro otorga al autor y al lector en relación con las matemáticas, el conocimiento matemático y la actividad matemática, al analizar el lenguaje utilizado (Herbel-Eisenmann y Wagner, 2005).

La presente investigación se incluye en la Categoría 2, dado que se realizó un estudio comparativo de los contenidos de algunos libros de texto de matemáticas de bachillerato, en cuanto a la presentación y uso que hacen de la relación pitagórica, en nuestro caso, bajo la consideración de que en tales ejes de análisis se incluyen formas de contextualización. Es decir, el análisis está focalizado en la RP, considerada como un referente epistemológico, dada su relevancia en la construcción de diferentes conceptos, en todas las áreas de las matemáticas; así como en la presentación que se hace de este contenido específico y las características de las tareas sobre el mismo.

3. Metodología

Esencialmente se analizaron siete libros de texto recomendados en los programas de estudio de bachillerato en México, García, M. A. (2009). *Matemáticas II para Preuniversitarios*; García, M. et al (2005). *Matemáticas 2 Bachillerato*; Zamora, M. et al. (2009). *Matemáticas 2 Geometría y trigonometría*; Farías, E. (2008). *Matemáticas 2 Para la Construcción del Aprendizaje*; Méndez, H. A. (2010). *Matemáticas 2*; Baley, J. et al. (2004). Trigonometría; Swokowski, E. W. et al. (2002). Álgebra y trigonometría con geometría analítica.

El análisis se llevó a cabo considerando las siguientes categorías: (i) referentes históricos, (ii) contexto disciplinar, (iii) tareas, (iv) demostraciones y (v) articulaciones conceptuales explícitas con otros resultados. Para los fines de esta investigación consideramos que en el caso de la RP, los referentes históricos son muy importantes puesto que es un saber de gran trascendencia en la construcción del conocimiento matemático, del cual no se puede dejar de mencionar su génesis histórica aún antes del mismo Pitágoras, lo que podría tener incidencia en la didáctica al identificar las dificultades epistemológicas por las que ha transitado la humanidad para la constitución del concepto hasta su forma actual, En el contexto disciplinar principalmente se consideran los aspectos numéricos, geométricos, algebraicos y trigonométricos, pues son los que usualmente se trabajan en el bachillerato. Por su parte, los usos que se hacen de la RP tanto en lo que corresponde a sus aplicaciones como a las formas que se emplea para demostrar otros resultados y por supuesto si previamente se incluyen o no, una o varias demostraciones de la RP. Ahora bien, el aspecto de la articulación, conceptual con otros resultados, es en lo cognitivo, un elemento esencial para propiciar aprendizajes significativos en los estudiantes. El uso de cada una de estas categorías está basado en la literatura de investigación en educación matemática. Por ejemplo, Hiebert et al. (2003), consideraron como relevante el identificar en las lecciones de matemáticas a las demostraciones y a las conexiones entre conceptos e ideas matemáticas.

Mediante el empleo de tales categorías, consideramos además que es posible identificar los distintos elementos que se hacen explícitos en los libros de texto analizados, con el objeto de indagar acerca de cómo se presenta la RP, dado que la consideramos como un saber sabio de gran trascendencia en la construcción y constitución del conocimiento.

4. Resultados

Los resultados de este trabajo se presentan a continuación, tomando en cuenta las categorías antes mencionadas bajo la consideración de que se llevó a cabo un análisis global y un contraste entre las características más relevantes de los textos.

i) Referentes históricos

En los libros analizados se omite hacer mención del referente histórico de la RP, sólo en *Farías (2008),* al enunciar por vez primera la RP, se hace mención de su contexto histórico. Se menciona que “el teorema se conocía por pueblos que precedieron a los griegos; pero fueron los pitagóricos quienes hicieron la generalización…” (p.77); se hace también una reseña biográfica sobre Pitágoras.

Es posible resaltar que la inclusión del hecho histórico de que la RP fue conocida por las culturas sumeria y egipcia, lo que posibilita el tratar con su representación numérica, sobre todo con las llamadas ternas pitagóricas, entre otras con la más conocida (3,4,5), entendida como tres números enteros que satisfacen a la misma RP, representada como $n^2 + m^2 = k^2$. Cabe resaltar que tal tratamiento está ausente de los libros analizados.

ii) Contexto disciplinar

En esta categoría existen muchas coincidencias en el tratamiento que dan los autores de los libros de matemáticas, en todos aparece el enunciado *En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa*”, expresado algebraicamente como $c^2=a^2+b^2$, seguido de esta proposición, se suele presentar la figura de un triángulo rectángulo de lados (3, 4,5) como ejemplo de una terna que satisface la relación algebraica.

Sin embargo en la mayoría de los libros analizados, no se presentan un tránsito de lo numérico a lo algebraico o de lo algebraico a lo geométrico y viceversa, por mencionar solo algunos registros de representación en los que se puede presentar la RP a los estudiantes, es decir, los autores de los libros de texto solo enuncian la RP y no extienden la discusión sobre las posibles diferentes representaciones y sus significados.

iii) Tareas

Se presentan problemas rutinarios en los que el estudiante conoce dos lados de un triángulo rectángulo y utiliza el Teorema para obtener el restante; los problemas relacionados con la RP son meramente algorítmicos, se plantean en supuestos contextos cotidianos, por ejemplo calcular la altura de un edificio. En otros casos, no se encontraron problemas en los que sea necesario utilizar explícitamente la RP, salvo actividades ya mencionadas en el contexto numérico y geométrico.

iv) Demostraciones

Respecto a las demostraciones que se incluyen de la RP, se puede mencionar que sólo se hacen ciertas justificaciones usando figuras geométricas. Sin embargo, la RP sí se ocupa para las deducciones de identidades trigonométricas como: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; entre otras, y también para deducir la ecuación de la circunferencia centrada en el origen: $x^2 + y^2 = r^2$. No se menciona la relevancia de la RP en el descubrimiento de los números irracionales, no se menciona que la RP no solo se cumple para los cuadrados de los lados del triángulo rectángulo sino que podrían ser otra clase de polígonos; sólo algunos libros mencionan que el Teorema de los cosenos es una clase de generalización de la RP.

v) Articulaciones conceptuales

No se aprecia en el análisis un interés explícito por mostrar las articulaciones conceptuales de la RP en cada uno de los contextos usados, por ejemplo, entre lo algebraico y lo trigonométrico, pero además y de manera preponderante el papel tan trascendente que tiene la RP para transitar entre la geometría, álgebra, trigonometría y la geometría analítica, que se incluyen en las asignaturas de matemáticas en el bachillerato, pero además se tendría que hacer mención de las articulaciones conceptuales que tiene la RP con otras asignaturas de matemáticas y física que se estudian en el nivel superior. En estos libros de texto se presentan omisiones o ausencias que a nuestro juicio pudieran deberse a dos causas: los autores parten del supuesto que no resultan relevantes para el aprendizaje de este tema en ese nivel educativo, o bien se asume que los propios autores las desconocen o soslayan. En todo caso, dichas omisiones o ausencias no coadyuvan para que el profesor, y en última instancia el estudiante, puedan comprender que hay toda una serie de ideas y conceptos alrededor de la RP, más allá de la simple expresión, $c^2=a^2+b^2$.

5. Conclusiones

A los autores de los libros de texto no les resulta relevante el detenerse a realizar una o dos demostraciones, sobre todo con la intención de reflexionar acerca de las características epistemológicas de la relación pitagórica, incluida la trascendencia que tiene en la construcción del conocimiento matemático, quizás porque no identifican la importancia de la RP como un referente epistemológico, una de cuyas funciones estriba en ser un elemento de articulación conceptual entre la aritmética, geometría, trigonometría, geometría analítica y el cálculo.

Frecuentemente la distancia entre dos puntos, una de las formas de representación de la relación pitagórica, se usa como un elemento argumentativo central para justificar y encontrar las ecuaciones de las cónicas; relaciones trigonométricas y su generalización en el teorema de los cosenos, entre otros. Los hallazgos en este sentido, también sugieren que este elemento no es suficientemente incorporado a los aprendizajes de los estudiantes.

Hay una evidente exclusión de la relevancia epistemológica de la RP, que tiene entre otras manifestaciones, la de ser sólo usada cada que se requiera sólo como un mero proceso algorítmico, sin que los autores pongan de manifiesto la gran importancia que tiene en la construcción del conocimiento matemático. Este hecho trae varias consecuencias didácticas y cognitivas, al ser presentado como cualquier otro saber matemático, la mayoría de las veces descontextualizado histórica y epistemológicamente.

Otro hecho relevante que se desprende del análisis de los libros citados es el que usualmente cada que aparece cualquier expresión de la forma $x^2 + y^2 = r^2$, o esta otra, $a^2 + b^2 = c^2$, es condición suficiente para llamarle teorema de Pitágoras, considerando por parte de los autores, innecesario explicar su validez y sus propios significados según el contexto de referencia. Sin aclarar, por supuesto que aunque en apariencia sean algebraicamente equivalentes, estrictamente hablando sus representaciones y significados no son definitivamente los mismos. Pareciera que a los autores y por ende a los profesores no les interesan las consecuencias cognitivas que este hecho tiene en los estudiantes.

Es conveniente insistir que se requiere hacer una revaloración epistemológica, didáctica y cognitiva de la RP, lo que debe tener una amplia expresión en los programas y libros de texto, pues de lo contrario al quedarse como un saber con un estatus de minusvaloración, impide mostrar su trascendencia en la cimentación del conocimiento matemático.

Referencias

Libros

- Baley, J.D. y Sarell, G. (2004). *Trigonometría* (3ª. Ed.) México: Mc Graw Hill.
- Farías, E. (2008). *Matemáticas 2 Para la Construcción del Aprendizaje*. México: Fernández Editores.
- García, M. et al (2005). *Matemáticas 2 Bachillerato*. México: Ed ST.
- García, M. A. (2009). *Matemáticas II para Preuniversitarios*. México: Esfinge.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., et al. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: results from the TIMSS 1999 Video Study*. Washington, DC: National Centre for Education Statistics.

- Loomis, E. S. (1972). *The Pythagorean proposition*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics.
- Méndez, H. A. (2010). *Matemáticas 2* (1ª ed.). México: Santillana.
- Swokowski, E. W. et al. (2002). *Álgebra y trigonometría con geometría analítica* (10ª ed.). México: Thomson Learning.
- Zamora, M. et al. (2009). *Matemáticas 2 Geometría y trigonometría*. México: Ed. ST.

<u>Capítulo de libros</u>

- Herbel-Eisenmann, B. & D. Wagner (2005). In the middle of nowhere: How a textbook can position the mathematics learner. In H. L. Chick and J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, pp. 121-128). Melbourne: PME.
- Shield, M. J. & Dole, S. (2009). An analysis of middle-year school mathematics textbooks. In C. U. Hock, Wahyudi, R. P. Devadason, et al. (eds.), *Proceedings of The International Conference on Science and Mathematics Education (CoSMED 2009)*. Penang, Malaysia.
- Son, J-W. (2005). A comparison of how textbooks teach multiplication of fractions and division of fractions in Korea and in the US. In H. L. Chick and J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 4, pp. 201-208). Melbourne: PME.

<u>Revistas</u>

- Fan, L. & Kaeley, G.S. (2000). The influence of textbooks on teaching strategies: An empirical study. *Mid Wenstern Educational Researcher*, 13(4), 2-9.
- Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How pre-service teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics, 62*(3), 331–355.
- Remillar, J.T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teacher's curriculum development. *Curriculum Inquiry*, 29, 315-342.
- Stein, M. K. & Smith M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275.
- Stacey, K. & Vincent, J. (2009). *Modes of reasoning in explanation in Australian eighth-grade mathematics textbooks*. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 271-288.

<u>Memorias de congresos</u>

- Fan, L. (2011). Textbook research as scientific research: Towards a common ground for research on mathematics textbooks. Paper presented at the 2011 International Conference on School Mathematics Textbooks, Shanghai.
- O'Keeffe, L. & O'Donoghue, J. (2011). Mathematics textbook analysis: The significance of textbook features to students learning. *Paper presented at CERME 7*. Rzeszów, Poland.