Análisis de caos en series de tiempo de actividad neuronal en la médula espinal del gato

Rodríguez Torres Erika Elizabeth [1], Reséndiz Flores Olivia [2], Viveros Rogel Jorge [1], Leonel Gómez Rocío [1], Quiroz González Salvador [4], Rudomín Zevnovaty Pablo [3]

[1] Centro de Investigación en Matemáticas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. [2] Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. [3] Universidad Estatal del Valle de Ecatepec, Departamento de Acupuntura Médica y Rehabilitación. [4] Departamento de Fisiología, Biofísica y Neurociencias, CINVESTAV-IPN.

1. Resumen

En este estudio, emplearemos una serie de tiempo escalar, correspondiente a la actividad eléctrica de interneuronas espinales, espontánea y provocada por el cepillado de la pierna, registrada en el dorso de la médula espinal del gato anestesiado. Si la serie corresponde a mediciones de un grado de libertad de un sistema dinámico, el cual evoluciona cerca de un atractor, entonces es posible reconstruir las órbitas en el espacio fase mediante la implementación de métodos de la teoría del caos. Para la reconstrucción de órbitas, es necesario determinar el intervalo de tiempo de observación (τ), así como la dimensión de encajamiento (d). El nivel de caos del sistema se infiere a partir del cálculo de exponentes de Lyapunov.

2. Obtención del intervalo de tiempo de observación(τ)

En principio, no existe criterio adecuado para elegir el tiempo de retardo τ, sin embargo, se ha encontrado que la *información mutua* de una serie de tiempo se convierte en un excelente opción para la elección de tal constante. La *información mutua* mide la dependencia general de dos variables. Estamos interesados en medir la dependencia de los valores $x(t+\tau)$ y $x(t)$. Considerando la asignación $[s,q]=[x(t),x(t+\tau)]$ se pueden considerar un sistema más general (S,Q). Si S y Q son continuas, se define la *información mutua* como

$$I_\tau(S,Q)=\int P_{sq}(s,q)log\left(\frac{P_{sq}(s,q)}{P_s(s)P_q(q)}\right)dsdq$$

I_τ mide la capacidad de predecir el valor que asumirá Q dado que S asumió s. Como se desea que $x(t+\tau)$ produzca nueva información, todo se reduce a minimizar $I(\tau)$ para $\tau=1,2,\dots,T$.

3. Obtención de la dimensión de encajamiento d

Basándose en el Teorema de Takens ((3),(4)), se han creado métodos para determinar la dimensión de encajamiento d óptima. Por ejemplo, el método de *falsos vecinos* que consiste en escoger d tal que dados dos puntos cercanos en el espacio reconstruido de dimensión d, éstos lo seguirán siendo en el espacio reconstruido de dimensión $d+1$. Si esto no ocurre, se dice que tales puntos son falsos vecinos (Figura 1).

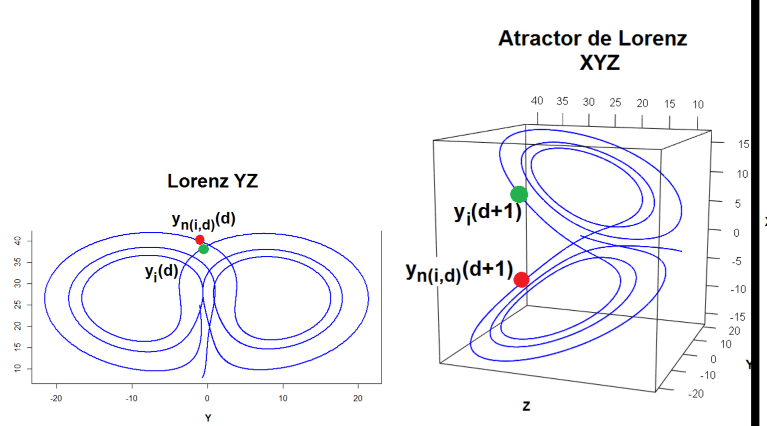

Figura 1: *Atractor de Lorenz*

Una forma de encontrar la dimensión de encajamiento, es procediendo de la siguiente forma. Suponiéndo que la serie de tiempo es de la forma $x_1,x_2,...,x_N$, se define $y_i(d)=(x_i,x_{i+\tau},...,x_{i+(d-1)\tau})$ para $i=1,2,...,N-(d-1)\tau$, donde d es la dimensión de encajamiendo y τ es el tiempo de retraso. Con estos, se construyen los siguientes valores

$$a(i,d)=\frac{\|y_i(d+1)-y_{n(i,d)}(d+1)\|}{\|y_i(d)-y_{n(i,d)}(d)\|},$$

con $i=1,2,...,N-d\tau$. Y consideramos

$$E(d)=\frac{1}{N-dt}\sum_{i=1}^{N-d\tau}a(i,d).$$

Para ver la variación de d y $d+1$, definimos

$$E1(d)=\frac{E(d+1)}{E(d)}$$

Este proceso, lo hacemos para $d=1,2,\dots,D$. Se desea que $E(d+1)=E(d)$, por lo que se escoge d tal que $E1(d)=1$.

4. Resultados para una Serie de Tiempo de la Actividad de una interneurona

Aplicamos los métodos descritos a la serie de tiempo registrada con una frecuencia de captura de 3.3 KHz (Ver Figura 2). Además calculamos los exponentes de Lyapunov que resultaron positivos de orden 10^{-4} en tres direcciones.

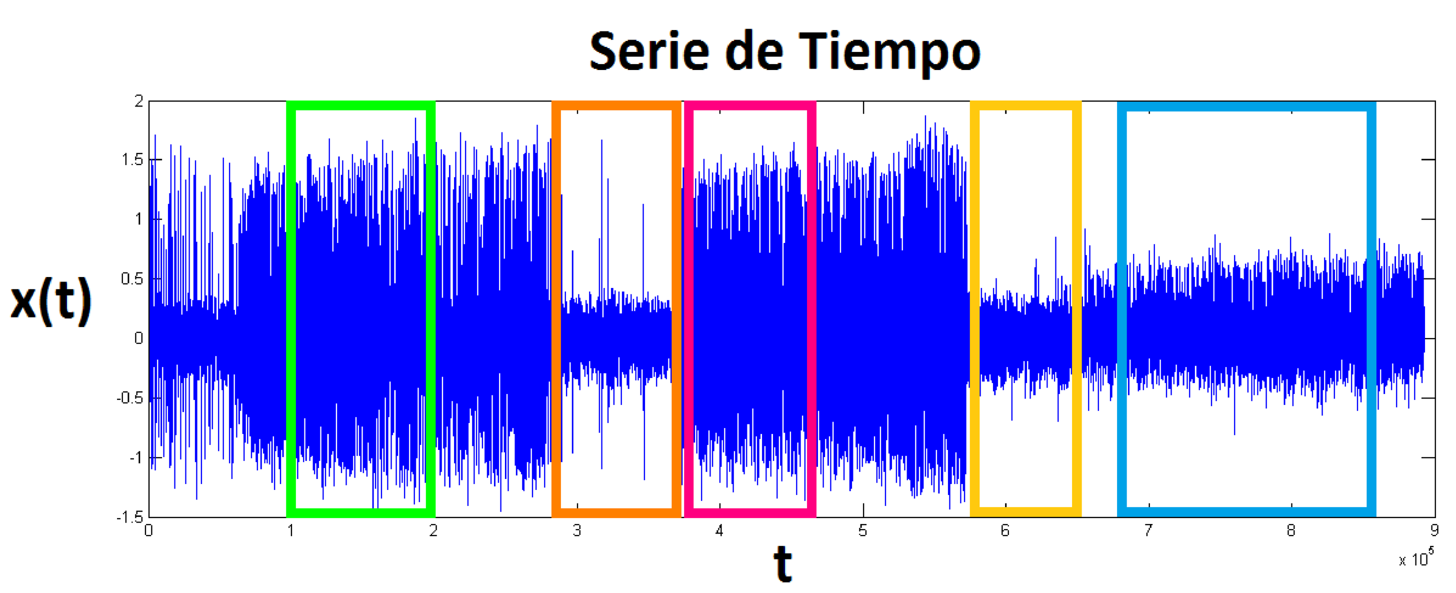

Figura 2: *Serie Biológia a 3.3 KHz. Cuadro: verde, actividad espontánea antes de la estimulación; naranja, durante la primera estimulación; rosa, actividad espontánea después de la primera estimulación; amarilla, durante la segunda estimulación; azul, después de la segunda estimulación.*

Primero, comenzamos estudiando la actividad espontánea, calculamos el intervalo del tiempo de observación y la dimensión de encajamiento para la serie, obteniéndo lo siguiente:

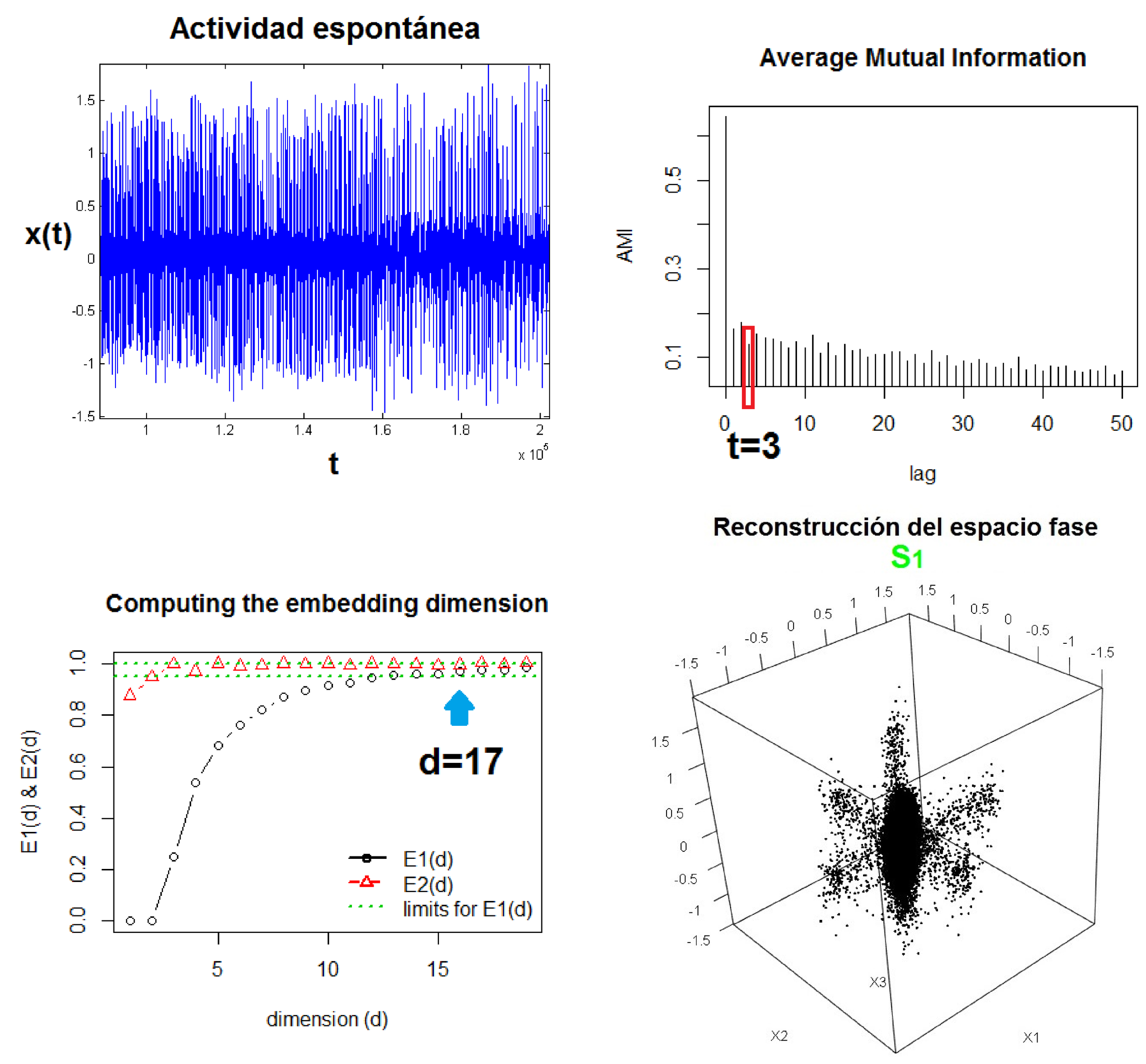

Figura 3: *Reconstrucción del espacio fase de la actividad espontánea*

Haciendo las reconstrucciones para el resto de los segmentos de la serie, se obtiene para la serie correspondiente a la primera estimulación $t=3$ y $d=16$. Para la actividad espontánea después de la primera estimulación, se obtiene $t=3$ y $d=15$. El siguiente trozo de la serie corresponde a la segunda estimulación con valores $t=3$ y $d=16$. En seguida, la serie pertenece a actividad espontánea después de dos estimulaciones, con $t=3$ y $d=16$. Las reconstrucciones de los espacios fase, son las siguientes:

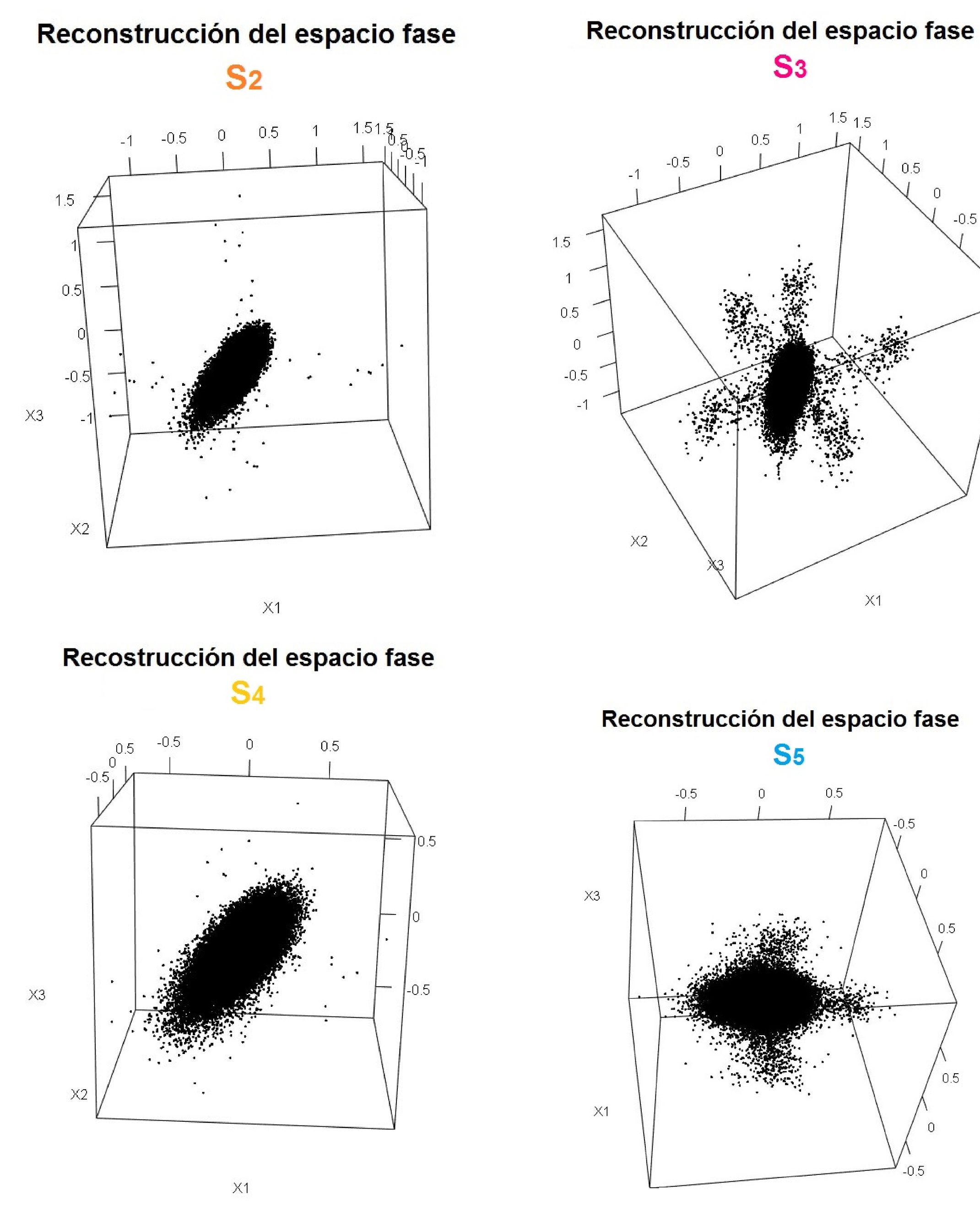

Figura 4: *Reconstrucción de los espacios fase.*

5. Conclusiones

Estos resultados preliminares muestran que se podría reconstruir el espacio fase de la serie de tiempo neuronal registrada en el dorso de la médula espinal del gato. Los exponentes positivos de Liapunov nos indican la posible caoticidad de los registros neuronales, que es un indicador de que el organismo tiene una gran capacidad de responder a los estímulos presentados en su entorno.

Notas:
Los métodos descritos anteriormente se encuentran implementados en el programa estadístico R.

Referencias

1. Cao Liangyue, *Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series*, Physica D, vol. 110, (1997), 43-50.
2. Fraser, M.; Swinney, H. L., *Independent coordinates for strange attractors from mutual information*, Physical Review A, vol. 33 no. 2, (1986), 1134-1140.
3. Takens, F., *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, vol. 898, (1981), 366-381.
4. Takens, F., *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, vol. 1125, (1985), 99-106.